Lösungsvorschlag zu Grundaufgaben zur ln-Funktion

Nr		BE

2.1

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $\quad D_f:\ x > 0 \wedge \ln x \neq 0 \iff x > 0 \wedge x \neq 1$, $\quad D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

keine Nullstellen, da $0 \notin D_f$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln x} = „\frac{+0}{-\infty}" = -0$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} = „\frac{+\infty}{+\infty}" = (l'H.) \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \gtrless 1}} \frac{x}{\ln x} = „\frac{1}{\pm 0}" = \pm\infty \implies x = 1$ vert. Asymptote von G_f

2.2

$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x) - 1}{(\ln x)^2}$

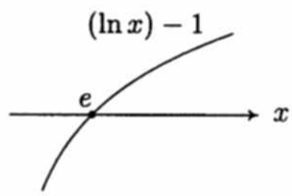
$f''(x) = \frac{(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) - 1) \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) - 1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^3} =$

$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x - 2\ln x + 2)}{(\ln x)^3} = \frac{2 - \ln x}{x \cdot (\ln x)^3}$

2.3

Monotonie: $f'(x) = 0: \quad (\ln x) - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$, $\quad f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

D_f:	0 … 1	1 … e	e … x
$(\ln x) - 1$:	−	−	+
$(\ln x)^2$:	+	+	+
$f'(x)$:	−	− (TIP bei e)	+

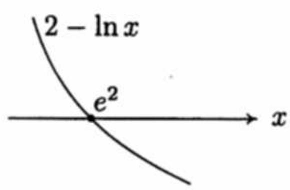


f str. mon. abnehmend in $]0;1[$ sowie in $]1;e]$, str. mon. zunehmend in $[e;\infty[\implies T(e|e)$ TIP

2.4

Krümmung: $f''(x) = 0: \quad \ln x = 2 \iff x = e^2$, $\quad f(e^2) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} = \frac{e^2}{2\ln(e)} = \frac{e^2}{2}$

D_f:	0 … 1	1 … e^2	e^2 … x
$2 - \ln x$:	+	+	−
x:	+	+	+
$(\ln x)^3$:	−	+	+
$f''(x)$:	−	+ (WP bei e^2)	−



G_f rechtsgekr. in $]0;1[$ sowie in $[e^2;\infty[$ und linksgekr. in $]1;e^2] \implies W(e^2|\frac{1}{2}e^2)$ Wendepunkt

2.5